

平成 19 年版

# 物理数学 II(複素関数論)

(作成日)2007/4/11

物理講義室・改 管理人

のまネコ (量産型)

<http://shrcat.blog91.fc2.com/>

## 目次

1	複素数	4
1.1	複素数と複素平面	4
1.2	Riemann 球面と無限遠点	4
2	複素関数とその微分	5
2.1	複素関数の極限值と微分	5
2.2	いろいろな正則関数	7
3	複素積分	9
3.1	複素積分	9
3.2	正則関数における複素積分の性質	11
3.3	Cauchy の積分公式と諸定理	15
4	数列の極限と無限級数	18
4.1	級数展開	18
4.2	冪級数の収束性	18
4.3	Taylor 展開と Laurent 展開	19
5	留数解析	24
5.1	留数定理	24
5.2	実関数への応用	27

# 1 複素数

## 1.1 複素数と複素平面

実数  $a, b$  と虚数単位  $i = \sqrt{-1}$  を用いて

$$z = a + ib \tag{1}$$

と表せる数  $z$  を複素数という。  $a$  を  $z$  の実部、  $b$  を虚部といいそれぞれ

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad , \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

と書く。特に  $b = 0$  であれば  $z$  は実数であり  $a = 0$  であれば純虚数であるという。複素数の和については実部同士、虚部同士を足せばよく、

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \tag{2}$$

積については  $i^2 = -1$  に注意すれば

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \tag{3}$$

商については  $c \neq 0, d \neq 0$  のとき

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \tag{4}$$

と計算される。複素数  $z = a + ib$  について、その実部を横軸に、虚部を縦軸にプロットすれば  $z$  を座標平面上に表すことが出来る。このとき横軸を実軸、縦軸を虚軸といい、この座標平面を複素平面、または Gauss 平面という。ここで

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi n \quad (n : \text{整数}) \tag{5}$$

とおけば式 (1) は  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  と表すことが出来る。 $|z|$  を絶対値  $\theta$  をその偏角といい  $\arg(z)$  と書く。偏角は  $2\pi$  の整数倍だけ不定である。

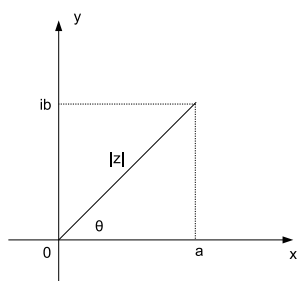


図 1 複素平面

## 1.2 Riemann 球面と無限遠点

- Gauss 平面上の全ての点は球面上の全ての点と一対一に対応する。
- 球面上の「北極」は Gauss 平面上では無限遠方にあたる。
- Gauss 平面で  $R \rightarrow \infty$  とすることは Riemann 球面を一周するだけでよい。

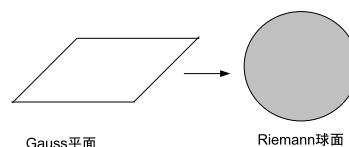


図 2 平面から球を作る

## 2 複素関数とその微分

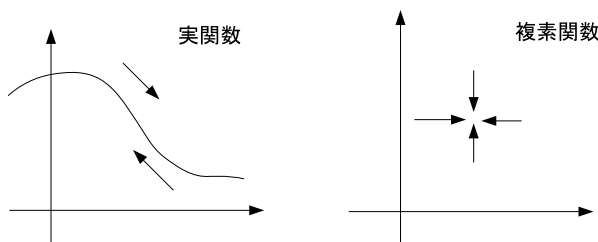
[複素関数定義]

複素数  $z$  の関数を複素関数と呼び、複素平面上の領域  $D$  の各点の  $z$  に対して、それぞれ 1 つの複素数  $w$  が対応するとき  $w$  を領域  $D$  で定義された複素関数という。

( $w$  の動く範囲が値域 領域  $D$  定義域)

### 2.1 複素関数の極限值と微分

- 複素関数  $w = f(z)$  がある定数  $z_0$  に近づくと  $w$  が点  $z_0$  に近づけば  $f(z)$  は  $z = z_0$  で極限值  $w_0$  をもつ.  $\implies (\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0)$
- 定義域  $D$  の  $f(z)$  について  $D$  内の点  $z_0$  で  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$  が  $h$  の取り方によらず有限の確定値を持つとき  $f(z)$  は  $z = z_0$  で微分可能と言いその極限值を微分係数という。
- $D$  内の各点で微分可能なとき  $f(z)$  は  $D$  で正則であると言い、 $f(z)$  を  $D$  における正則関数という。
- 各点での微分係数を値とする関数を  $f(z)$  の導関数と言い、 $f'(z)$  と表す。
- 実関数とは違い複素関数では複素平面上のあらゆる方向からの極限が等しくなければならない。



[例題 2.1]  $f(z) = \bar{z} = x - iy$  について

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \overline{\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} -1 & (\Delta x \rightarrow 0 \text{ の後 } \Delta y \rightarrow 0) \\ 1 & (\Delta y \rightarrow 0 \text{ の後 } \Delta x \rightarrow 0) \end{cases} \quad (6)$$

よって  $f(z) = \bar{z}$  は微分不可能である。

[定理 2.1] [Cauchy-Riemann の方程式]

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ( $z = x + iy$ ,  $u, v, x, y \in \mathbb{R}$ ) について,  $f(z)$  が点  $z$  で微分可能であるための必要十分条件は  $u, v$  が全微分可能であり, かつ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (7)$$

が成り立つことである.

証明) 導関数は  $\Delta z$  の 0 への近づけ方によらないので (i)  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$  と (ii)  $\Delta y \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$  が一致する必要がある.

(i) 実軸に沿って近づける ( $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (8)$$

(ii) 虚軸に沿って近づける ( $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y i} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y i} \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (9)$$

よって (i)(ii) の虚部と実部を比べると ...

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (10)$$

逆に, 方程式が成り立っているとき  $u, v$  で微分すると

$$f(z + \Delta z) - f(z) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] \quad (11)$$

$\Delta x, \Delta y$  で Taylor 展開を行う.

$$f(z + \Delta z) - f(z) \approx \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} + i \left[ \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (12)$$

ここで, Cauchy-Riemann の方程式を適用する.

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (\Delta x + i\Delta y) \left( \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (13)$$

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  で両辺を割ると

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (14)$$

$\Delta z \rightarrow 0$  の近づけ方によらない値に収束する.

[定理 2.2] [Laplace 方程式]

正則な関数の実部  $u(x, y)$  虚部  $v(x, y)$  は (2次元)Laplace 方程式を満たす.

すなわち,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (15)$$

が成り立つ.

証明) 定理 2.1 より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = - \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

$$\therefore \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (17)$$

$\Delta v$  も同様に証明できる.  $u(x, y) v(x, y)$  が 2 回微分可能であることが必要だが, このことは後で述べる.  
(というか, 何回でも微分可能である.)  $\implies$  [Goursat の定理]

## 2.2 いろいろな正則関数

(i) (多項式)  $z$  の任意の多項式は正則関数である.

$$P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n \quad (n \text{ 次の多項式}) \quad (18)$$

(ii) (有理関数) 多項式  $P(z)$  と  $Q(z)$  から成る  $R(z)$

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n}{\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_n z^n} \quad (19)$$

ただし,  $Q(z) = 0$  を満たす点  $Q(z)$  のゼロ点では定義されない.  $Q(z)$  のゼロ点を  $R(z)$  の極 (Pole) と呼ぶ,  $R(z)$  は  $R(z)$  の極を除いて正則 (微分可能)

(iii) (指数関数)  $z$  の指数関数を  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$  で定義  $e^z$  は  $C - R$  方程式を満たし, 至るところで正則.

一般に, 関数  $f(z) = f(z + \alpha)$  の関係を満たすとき,  $f(z)$  を周期  $\alpha$  の周期関数と呼ぶ.

(iv) (三角関数)

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad , \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad , \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad (20)$$

複素関数では  $\sin$  や  $\cos$  と  $\sinh$  や  $\cosh$  は「別々の関数ではない」

$|\cos z| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C})$  とは限らない.

(v) (多価関数)  $\cdots$  1 つの変数に対して複数の値をとる関数

まず, 逆関数を定義する.

$w = f(z)$  で対応する  $z$  と  $w$  について  $z = g(w)$  と表されるとき,  $g$  を  $f$  の逆関数という

$f(z) = z^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) の逆関数として,  $z = w^m$  を満たす  $w$  を  $w = z^{\frac{1}{m}}$  で表し,  $z$  の  $m$  乗根と呼ぶ.

$w = z^{\frac{1}{m}}$  は次の異なる  $m$  個の値を持つ.

$z = re^{i\theta}$  とすると, ( $w = w_0, w_1, \dots, w_{m-1}$ )  $w_k = r^{-\frac{1}{m}} e^{-\frac{i}{m}(\theta + 2k\pi)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ )

$\Rightarrow$  1 つの  $z$  を考えると, 異なる  $m$  個の  $w$  が求まる.  $w = z^{-\frac{1}{m}}$  は  $m$  価関数

指数関数  $z = e^w$  の逆関数として  $z = e^w$  を満たす  $w$  を  $w = \ln z$  で表し,  $z$  の対数関数と呼ぶ.

$e^w = e^{w+2\pi ni}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) なので

$z = re^{i\theta}$  とすると,  $\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ni$

$\Rightarrow$  1 つの  $z$  に対して無限個の  $w$  が対応する. 対数関数は無限多価関数である.

\* 無限多価関数において  $n = 0$  のときの  $\ln z$  の値を対数関数の主値と言い特に  $\text{Ln } z$  と書く.  
一般に,  $-\pi < \theta_0 < \pi$  となるような  $\theta_0 = \theta + 2\pi n$  を採用したものを主値と呼ぶ.

(vi) (逆三角関数, 逆双曲線関数)

$z = \sin w$  となるような  $w$  を  $w = \sin^{-1} z$  と表す.  $z = \sinh w$  となるような  $w$  を  $\sinh^{-1}$  と表す.

三角関数は周期  $2\pi$  の周期関数なので  $z = z_0$  を考えたとき,  $z_0 = \sin w$  を満たす 1 つの  $w$  を  $w_0$  と書くと,

$w_n = w_0 + 2n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) も全て  $z_0 = \sin w_n$  を満たす.

よって,  $w = \sin^{-1} z$  は無限多価関数である.

次に,  $z = \sin w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw})$  これを  $w$  について解く.

上式の両辺に  $2ie^{iw}$  を掛ける

$$\begin{aligned} e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 &= 0 \\ e^{iz} &= iz \pm \sqrt{1 - z^2} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\therefore w = \sin^{-1} z = -i \ln \left[ iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right] \tag{22}$$

同様に  $z = \tan w$  をについて解くと

$$\therefore w = \tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln \left[ \frac{1 + iz}{1 - iz} \right] \tag{23}$$

となる.

(vii) (一般の冪関数)  $\alpha$  が複素関数のとき  $z^\alpha$  を次で定義  $z^\alpha$  ( $z \neq 0$ )

以下  $\alpha$  による場合分け

- $\alpha \in \mathbb{Z}$  のとき  $\implies z^\alpha = z^n$  は一価関数
- $\alpha = \frac{1}{m} \implies z^\alpha = z^{\frac{1}{m}}$  は  $m$  価関数
- その他の  $\alpha$  については  $z = re^{i\theta}$  とおき  $\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi n$   
 なので  $z^\alpha = e^{\alpha(\ln r + i\theta + 2\pi n)}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) は無限多価関数

### 3 複素積分

#### 3.1 複素積分

$z$  平面 (Gauss 平面) 上の 2 点  $P$  と  $Q$  をとって  $P$  と  $Q$  を結ぶ曲線  $C$  をパラメータ  $t$  を用いて表すとする.

$$\begin{cases} P : z(t_1) \\ Q : z(t_2) \end{cases} \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (24)$$

$C$  を  $z(t)$  を用いて表す. 複素関数  $f(z)$  の曲線  $C$  に沿った積分を次で定義する.

$$I = \int_C f(z) dz = \int_{t_2}^{t_1} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt \quad (C : \text{積分経路}) \quad (25)$$

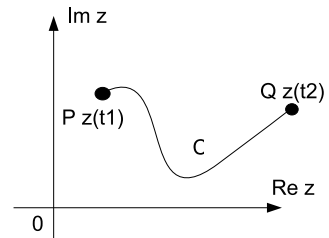


図 3

[例題 3.2] [複素積分の具体例]

$$\text{曲線 } C_1 : z(t) = t + it^2 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (26)$$

$$\text{曲線 } C_2 : z(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ 1 + i(t-1) & (1 \leq t \leq 2) \end{cases} \quad (27)$$

$$(C_1 \text{ について}) \quad \int_{C_1} z(t) dz = \int_0^1 (t + it^2)(1 + 2it) dt = i \quad (28)$$

$$(C_2 \text{ について}) \quad \int_{C_2} z(t) dz = \int_0^1 t dt + \int_1^2 (i + -(t-1)) dt = i \quad (29)$$

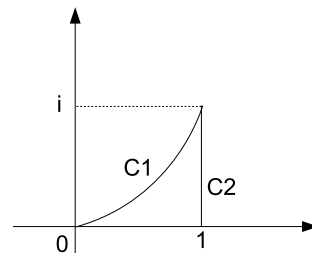


図 4 2通りの曲線

\* 正則関数の積分は経路によらず曲線の端点だけで決まる.  
 (後で証明します.)



[例題 3.3] [線積分:極座標表示]

$$\oint_C z^m dz \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (30)$$

C は単位円上を半時計回りに一周するものとする

まず,  $m$  について場合分けを行う. ( $m \neq -1, m = -1$ )  
 $m = -1$  のとき被積分関数が正則でないことに注意する.

(i) ( $m \neq -1$ )

$\theta$  を用いてパラメーター表示すると  $z^m = e^{mi\theta}$

よって,

$$\begin{aligned} \oint_C z^m dz &= \int_0^{2\pi} e^{mi\theta} \frac{dz}{d\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\theta} \\ &= \frac{1}{m+1} \left[ e^{i(m+1)\theta} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

(ii) ( $m = -1$ )

$$\oint_C z^{-1} dz = i \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{i\theta} d\theta = 2\pi i \quad (32)$$

まとめると ...

$$\oint_C z^m dz = \begin{cases} 0 & (m \neq -1) \\ 2\pi i & (m = -1) \end{cases} \quad (33)$$

である.

しかし, 一般的には点  $z_0$  を囲む任意の閉曲線 C に対し

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & (m \neq -1) \\ 2\pi i & (m = -1) \end{cases} \quad (34)$$

が成り立っている.

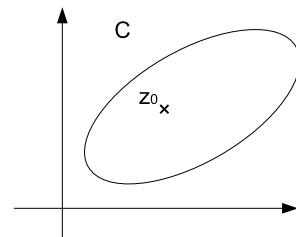


図5 一般の曲線

[定理 3.3] [Cauchy の積分定理]

単純曲線  $C$  (自分自身と交わらない曲線) で囲まれた領域  $D$  内で複素関数  $f(z)$  が正則であるとき (つまり微分可能であるとき)

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad (35)$$

が成り立つ

証明)

$f(z) = u + vi$  ( $u, v$  は実関数) とする. これを上式の左辺に代入すると.

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u + vi)(dx + dy) = \oint_C (udx + vdy) + i(udy + vdx) \quad (36)$$

ここで, 平面の Green の定理を用いる

$C$  を単純曲線,  $D$  を  $C$  に囲まれた領域とすると

$$\oint_C udx + vdy = \iint_D \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad (37)$$

が成り立つ. よって, (36) 式を書き換えると...

$$(36) = \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \quad (38)$$

また, ここで C-R 方程式を用いると上式の右辺が 0 となり  $\oint_C f(z)dz = 0$  を示せる.

### 3.2 正則関数における複素積分の性質

(i) 端点 (始・終) が固定されている場合, その 2 点を結ぶ任意の経路上の積分は等しい.

$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1 - C_2} f(z)dz \quad (39)$$

$C_1, C_2$  で囲まれた領域正則でない点が無いとき Cauchy の積分定理より右辺は 0

$$\therefore \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \quad (40)$$

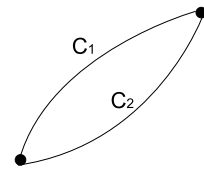


図 6

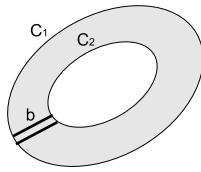


図 7

(ii) 周回積分について、図 7 のように閉曲線  $C_1$  とその内側にある閉曲線  $C_2$  を考える。  $C_1, C_2$  の囲む灰色の領域で  $f(z)$  は正則であるとする。  $C_1$  と  $C_2$  は橋でつながっていて  $C_1 \rightarrow b \rightarrow b \rightarrow C_2 \rightarrow b$  とたどる閉曲線を考えて Cauchy の積分定理より全体の積分値は 0 となる。  $\oint_{C_1+b+C_2-b} f(z)dz = 0$  ( $b$  は橋で  $b-b$  で互いにキャンセルする)

$$\therefore \oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz \quad (41)$$

つまり、 $C_1, C_2$  で囲む領域が正則でない点を横切らない限り積分経路を変えても積分値は一定である。

\* また、ここで  $C_2$  は正則でない点を囲んでも良いので共通の正則でない点を囲んでいる積分の値は全て同じこの事実と [例題 2.3] の結果より (34) 式が成り立つことが分かる。

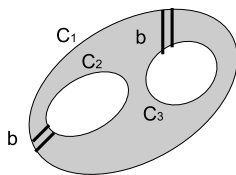


図 8

図 8 のように分けても Cauchy の積分定理が成り立つ。

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz = 0 \quad (42)$$

一般に

$$\oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \dots + \oint_{C_n} f(z)dz = 0 \quad (43)$$

が成り立っている。

図 8 は多重連結だが内部は単連結で表せるため、図 8 のような系でも Cauchy の積分定理が適用できるのである。

\* そもそもなぜ Cauchy の積分定理のような強力な定理が成り立つのかというと単連結領域ではどんな曲線も連続的に一点まで縮めることができるからである。

ここで、少し Cauchy の積分定理に関する例題を紹介する。

[例題 3.4] [Fresnel の積分]

$\oint_C e^{-z^2} dz$  を図 9 の経路で積分し,  $R \rightarrow \infty$  とすることで

$$\int_0^\infty \cos r^2 dr = \int_0^\infty \sin r^2 dr = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (44)$$

を示せ.

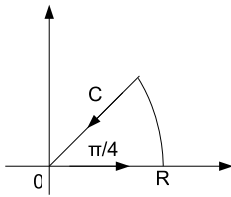


図 9 積分経路

$r, \theta$  でパラメータ表示すると  $z = re^{i\theta}, dz = ri\theta d\theta + e^{i\theta} dr$

上記のパラメータで与式を書き直すと

$$\oint_C e^{-z^2} dz = \int_0^{\pi/4} \exp[-r^2 e^{2i\theta}] (ri\theta e^{i\theta} d\theta + e^{i\theta} dr) \quad (45)$$

次に, 経路を分割する.

$$C_1 : \theta = 0, r : 0 \rightarrow R \quad C_2 : r = R, \theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad C_3 : \theta = \frac{\pi}{4}, r : R \rightarrow 0$$

この経路により, 積分を分割すると (45) 式は

$$(45) = \int_0^R \exp(-r^2) dr + \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 e^{2i\theta}) Ri e^{i\theta} d\theta - \int_0^R \exp(-ir^2) e^{i\pi/4} dr \quad (46)$$

第 1 項は Gauss 積分より

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \exp(-r^2) dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (47)$$

に収束している.

第 2 項は, 優級数を用いて 0 に収束することを示す.

$$|\text{第 2 項}| = \int_0^{\pi/4} |\exp(-R^2 e^{2i\theta})| |Ri\theta| d\theta \quad (48)$$

$R > 0, |ie^{i\theta}| = 1$  なので

$$R \int_0^{\pi/4} \exp[-R^2 \cos(2\theta)] d\theta \quad (49)$$

ここで, 変数変換  $2\theta = \theta'$  を用いると,

$$\frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} \exp[-R^2 \cos(\theta')] \quad (50)$$

ここで優級数を作るために  $[0, \frac{\pi}{2}]$  で図 10 のようなグラフを考える.

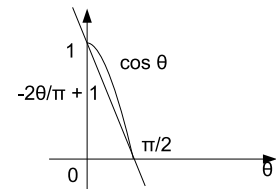


図 10 直線と  $\cos \theta$  の大小関係

実際に作る前に優級数を説明しておく

[優級数の方法]

無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  に対し、 $|z_n| < a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) となるような正の項  $a_n$  を持つ級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が収束するとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  は絶対収束する。このとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  を優級数という。

つまり、求めたい級数よりサイズが大きい級数を探してくる必要がある。

図 10 より  $[0, \frac{\pi}{2}]$  の範囲で明らかに、 $-\frac{2\theta}{\pi} + 1 \leq \cos \theta$  であることがわかる。よって、優級数の方法より

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp[-R^2 \cos \theta'] d\theta' &\leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left[-R^2\left(\frac{-2\theta'}{\pi} + 1\right)\right] d\theta' \\ &= \frac{R}{2} \exp(-R^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{2R^2}{\pi}\theta'\right) d\theta' \\ &= \frac{\pi}{4R} \exp(-R^2)[\exp(R^2) - 1] = \frac{\pi}{4R} - \frac{\pi}{4} \exp(-R^2) \end{aligned} \quad (51)$$

ここで最右辺を  $R \rightarrow \infty$  とすることによって

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |\text{第 2 項}| = 0 \quad (52)$$

となることが分かる。

第 3 項について

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} (\text{第 3 項}) &= - \int_0^{\infty} e^{-r^2 i} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\infty} \cos r^2 + \sin r^2 dr + i \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\infty} \cos r^2 - \sin r^2 dr \end{aligned} \quad (53)$$

Cauchy の積分定理より、最左辺  $\oint_C e^{-z^2} dz = 0$  である。両辺の実部と虚部を比べると実部について

$$\int_0^{\infty} \cos r^2 + \sin r^2 dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (54)$$

虚部について

$$\int_0^{\infty} \cos r^2 dr = \int_0^{\infty} \sin r^2 dr \quad (55)$$

まとめると

$$\therefore \int_0^{\infty} \cos r^2 dr = \int_0^{\infty} \sin r^2 dr = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (56)$$

次に、複素積分で非常に重要な Cauchy の積分公式を導出する。

### 3.3 Cauchy の積分公式と諸定理

[定理 3.4] [Cauchy の積分公式]

複素関数  $f(z)$  がある領域  $D$  で正則であるとき,  $D$  内の任意の点  $z_0$  を囲む  $D$  内の単純閉曲線  $C$  に対し

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (57)$$

が成り立つ.

(証明)

$f(z) = f(z_0) + f(z) - f(z_0)$  より両辺に  $\frac{1}{z - z_0}$  を掛けて積分すると

$$\oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint \frac{1}{z - z_0} dz + \oint \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \quad (58)$$

右辺第 1 項について, 閉曲線  $C$  は  $z_0$  を囲む任意の曲線なので  $C$  を  $z_0$  を中心とした半径  $a$  の曲線とする.  
 $z = z_0 + ae^{i\theta}$

$$(\text{右辺第 1 項}) = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{ae^{i\theta}} aie^{i\theta} d\theta = 2\pi i f(z_0) \quad (59)$$

後は第 2 項が 0 になることを示せば良いのだが, 0 であることを証明するために [関数の連続性] について説明する.

[関数の連続性]

関数  $f(x)$  が  $x = a$  で連続であることは, 任意の  $\epsilon > 0$  に対してある  $\delta$  を取ることができて  $|x - a| < \delta$  ならば  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$  とできることをいう.

$\epsilon - \delta$  に関しては他書を参考にして欲しい, 証明にはこの連続性の定義と優級数の方法を用いる.

今の場合  $f(z)$  の連続性から  $|z - z_0| < \delta$  のとき  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$  とすることができる.  $C$  は  $z_0$  を中心とする半径  $a$  の微小な円とする.

$$\begin{aligned} |\text{右辺第 2 項}| &\leq \oint \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| = \int_0^{2\pi} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{a} a d\theta \\ &< \epsilon \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\epsilon \end{aligned} \quad (60)$$

$\epsilon$  はいくらでも小さくとれるので最右辺は 0 に収束する. 故に元の第 2 項も

$$\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0 \quad (61)$$

となる.

$$\therefore \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (62)$$

[例題 3.5] [Cauchy の積分公式を使った例題]

$$\oint_C \frac{1}{z^4 - 1} dz \quad (63)$$

$C : |z - 1| = 1$  の円を反時計回りに一周する

$\frac{1}{z^4 - 1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)(z+i)(z-i)}$  で領域内で正則でない点は  $z = 1$  なので  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+1)}$  として Cauchy の積分公式を用いると

$$\oint \frac{1}{z^4 - 1} = \oint \frac{f(z)}{z - 1} dz = 2\pi i f(1) = \frac{\pi i}{2} \quad (64)$$

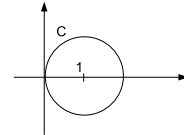


図 11 積分経路

次に Cauchy の積分公式を用いて証明できる定理をいくつか紹介する.

[定理 3.5] [Goursat の定理]

領域  $D$  内で  $f(z)$  が正則ならば  $D$  内では何回でも微分可能であり,  $n$  階導関数  $f^{(n)}(z) = \frac{d^n f(z)}{dz^n}$  は次の式で与えられる.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z_0)}{(z_0 - z)^{n+1}} dz_0 \quad (65)$$

(証明)

まず, 導関数の定義より

$$2\pi i f'(z) = 2\pi i \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (66)$$

ここで, 右辺に Cauchy の積分公式を用いると

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \oint_C \left[ \frac{f(z_0)}{z_0 - (z + \Delta z)} - \frac{f(z_0)}{z_0 - z} \right] dz_0 \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \oint_C \frac{\Delta z f(z_0)}{(z_0 - z - \Delta z)(z_0 - z)} dz_0 \\ &= \oint_C \frac{f(z_0)}{(z_0 - z)^2} dz_0 \end{aligned} \quad (67)$$

同様にして,

$$\begin{aligned} 2\pi i f''(z) &= 2\pi i \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f'(z + \delta z) - f'(z)}{\Delta z} \\ &= 2 \oint_C \frac{f(z_0)}{(z_0 - z)^3} \end{aligned} \quad (68)$$

これより帰納的に

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z_0)}{(z_0 - z)^{n+1}} dz_0 \quad (69)$$

を得る.

[定理 3.6] [Liouville の定理]

$|z| < \infty$  で正則な関数  $f(z)$  に対して  $|f(z)| < M$  を満たす定数  $M$  が存在するとき  $f(z)$  が有界であるとき  $f(z)$  は  $z$  によらない定数である.

(証明)

任意の点  $z_0$  をとると, Cauchy の積分公式から  $z = 0$  を中心とした半径  $R$  の円周を経路  $C$  として

$$\begin{aligned} f(z_0) - f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} - \frac{f(z)}{z} dz \\ &= \frac{z_0}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z(z - z_0)} dz \end{aligned} \quad (70)$$

$C$  をパラメータ表示する.  $z = Re^{i\theta}$ ,  $iRe^{i\theta}d\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ )

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(0)| &= \frac{|z_0|}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{z(z - z_0)} dz \right| \\ &= \frac{|z_0|}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z - z_0} id\theta \right| \leq M \frac{|z_0|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|z - z_0|} d\theta \quad (\because |f(z)| < M) \end{aligned} \quad (71)$$

$R$  を十分大きくとって,  $|z_0| < \frac{R}{2}$  となるようにとれば

$|z - z_0| \leq |z| + |z_0| = R + |z_0| > \frac{R}{2} \implies \frac{2}{R} \leq \frac{1}{|z - z_0|}$  これより

$$|f(z_0) - f(0)| < M \frac{|z_0|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|z - z_0|} dz \leq M \frac{2|z_0|}{R} \quad (72)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |f(z_0) - f(0)| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2|z_0|}{R} M = 0 \quad (73)$$

故に,  $f(z_0) = f(0)$  となり  $z_0$  は任意の点なので  $f(z)$  は  $z$  によらない定数となる.

[定理 3.7] [代数の基本定理]

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n = 0 \quad (74)$$

複素係数をもつ  $n$  次方程式 ( $\alpha \neq 0$ ) は少なくとも一つの複素数解をもつ.

(証明)

背理法を用いる. 「 $f(z) = 0$  が一つも解を持たない」この時, 至るところで  $f(z) \neq 0$  とすると

$\frac{1}{f(z)}$  は  $|z| < \infty$  の至るところで正則, 加えて  $|z| \rightarrow \infty$  では  $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{|\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n|} \rightarrow 0$  よって,  $\frac{1}{f(z)}$  は有界である. よって, この結果から Liouville の定理より実数であることになる. が,  $f(z)$  は  $n$  次多項式であり  $\alpha \neq 0$  なので  $f(z)$  は実数ではあり得ない. 故に, 仮定が間違っている.  $f(z) = 0$  は少なくとも一つの解を持つ.



## 4 数列の極限と無限級数

### 4.1 級数展開

$$[z \text{ の多項式}] \quad S_n(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (75)$$

は  $z = \infty$  を除く全平面で正則, このとき

$$\begin{cases} S_n(z) \text{ の微分} = \text{項別微分} \\ S_n(z) \text{ の積分} = \text{項別積分} \end{cases}$$

が成り立つ.

ここで,  $S_n(z)$  を拡張して無限個の  $z$  の冪項からなる関数  $S(z)$  を考える.

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \quad (\text{原点を中心とする})z \text{ の冪級数} \quad (76)$$

\* 各項が  $|z| < \infty$  で正則にも関わらず必ずしも  $S(z)$  が  $|z| < \infty$  で正則とは限らない

領域  $D$  の点  $z$  において  $S_n(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n$  に対し,  $n$  を大きくして  $S_n(z)$  がある値に近づく  $\implies S_n(z)$  は  $z$  で収束するという.

$S(z) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$  で定義され  $S(z)$  が  $D$  内で全て収束するとき  $D$  内で収束するという.

### 4.2 冪級数の収束性

例として

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \quad (77)$$

を考える

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n \quad (78)$$

$$zS_n(z) = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n+1} \quad (79)$$

の差  $(1-z)S_n(z) = 1 - z^{n+1}$  を両辺  $(1-z)$  で割ると

$$\begin{cases} (z \neq 1) & S_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \\ (z = 1) & S_n(z) = n + 1 \quad (\text{定数}) \end{cases} \quad (80)$$

ここで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \begin{cases} |z| < 1 \cdots & (0 \text{ に収束}) \\ |z| > 1 \cdots & (\text{発散}) \end{cases} \quad (81)$$

より,

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1) \quad (82)$$

一般に原点を中心とする冪級数は原点を中心として、級数に固有の半径を持つ円の内部で収束する。  
 $\Rightarrow$  この円を収束円、その半径を収束半径と呼ぶ。

### 4.3 Taylor 展開と Laurent 展開

- 冪級数は収束円の内部で項別に積分可能
- 冪級数を微分して得られる級数の収束半径は元の級数の半径と同じ
- 原点以外の一般の点  $z = z_0$  を中心とする級数  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$  の収束円の中心は  $z_0$  である

冪級数  $\Rightarrow$  収束円の内部で正則な関数を与える  $\Rightarrow$  逆に、正則関数を冪級数で表せないか? (Taylor 級数)

[定理 4.8] [Taylor 展開]

$f(z)$  は領域  $D$  内で正則であるとする。 $D$  内に収まるように中心  $z_0$  の円  $C$  をとったとき、この  $C$  内部で  $f(z)$  は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (83)$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad (84)$$

と冪級数展開できる。 ( $w$ :領域上の点,  $z$ :領域内の点)

(証明)

$f(z)$  が  $z = z_0$  を中心とする円  $C$  (半径  $\rho$ ) の内部で正則なとき、 $C$  内部の点  $z$  における値は Cauchy の積分公式より ( $z_0 \rightarrow z$ )

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (85)$$

$w$  は  $C$  上の点,  $z$  は  $C$  内部の点なので

$$|w - z_0| = \rho \quad (86)$$

$$|z - z_0| < \rho \quad (87)$$

$$(86) \div (87) = \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1 \quad (88)$$

この (88) をパラメータとして考え展開を行う。従って、 $C$  上の  $w$  と  $C$  内の  $z$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{w - z_0} \left[ 1 + \frac{z - z_0}{w - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n \end{aligned} \quad (89)$$

ここで, Cauchy の積分公式に (89) 式の最右辺を代入すると

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \quad (\text{分母分子に } n! \text{ を作る}) \end{aligned} \quad (90)$$

周回積分を Goursat の公式で置き換えることにより

$$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad (91)$$

を得る.

これより, Taylor 展開を得たわけだが, Taylor 展開では特異点を中心とする展開は不可能である. Taylor 展開を更に一般化し, 負の冪まで含むようにして特異点の周りでも展開を可能にしたものが次に紹介する Laurent 展開である.

[定理 4.9] [Laurent 展開]

複素関数  $f(z)$  が点  $z_0$  を特異点に持つとする. 点  $z_0$  を中心とする, 同心円  $C_1, C_2$  をとる. ただし,  $C_1$  は他の特異点を囲んでいても構わず,  $C_1$  は  $C_2$  の内側にあり  $C_1$  と  $C_2$  の間の領域  $D$  には特異点が無いようにする. このとき  $D$  内の任意の点  $z$  に対し

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad (92)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \quad (93)$$

$C$  は  $D$  内にあり  $C_1$  を囲むような任意の閉曲線である.

[証明]

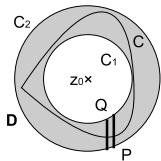


図 12 積分経路

$P(C_2) \rightarrow P \rightarrow Q(-C_1) \rightarrow Q \rightarrow P$  という閉曲線経路で Cauchy の積分公式を用いる. ドーナツ領域  $D$  の任意の点  $z$  での  $f(z)$  の値は, この経路上の周回積分で与えられる.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{P \rightarrow Q} \frac{f(w)}{w-z} dw - \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{Q \rightarrow P} \frac{f(w)}{w-z} dw \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \end{aligned} \quad (94)$$

(i) 第1項について

今,  $|z - z_0| < |w - z_0| \rightarrow \frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} < 1$  となっている. よって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n \end{aligned} \quad (95)$$

と展開される. これを用いて第1項を書き換えると

$$(\text{第1項}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C_2} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} f(z_0) dw (z - z_0)^n \quad (96)$$

(ii) 第2項について

この領域では  $|z - z_0| > |w - z_0| \rightarrow \frac{|w - z_0|}{|z - z_0|} < 1$  (i) と同様にして,

$$\frac{1}{w - z} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (97)$$

と展開できるので, これを用いて第2項を書き換えると

$$(\text{第2項}) = - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C_1} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} f(z_0) dw \quad (98)$$

$n = 0 \rightarrow \infty \implies n = -1 \rightarrow -\infty$  として上式を書き換えると (分母分子が入れ替わる所がポイント)

$$(\text{第2項}) = - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-1}^{-\infty} \oint_{C_1} \frac{f(z_0)}{(w - z_0)^{n+1}} dw (z - z_0)^n \quad (99)$$

ここで,  $C_1, C_2$  を変形させて  $C = C_1 = C_2$  となるようにすれば, (96), (99) 式はまとめて表せて

$$\begin{aligned} (94) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw (z - z_0)^n + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{n=-1} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw (z - z_0)^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{\infty} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw (z - z_0)^n \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \left( c_n \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) \end{aligned} \quad (100)$$

しかし、積分を行って、 $c_n$  を求める作業は大変なので実際には、Laurent 展開の計算は次の例題のように工夫して行う。(ここで言う工夫とは以下でも示しますが、正則な部分を取りあえず Taylor 展開しておいて後で正則でない部分を付け加えるというものです.)

[例題 4.6] [Laurent 展開の例題]

次の関数を指定された範囲で Laurent 展開せよ.

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{z(z-2)} \quad \begin{cases} A: |z-2| < 2 \\ B: |z-2| > 2 \end{cases} \quad (101)$$

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{z^2+1} \quad \begin{cases} A: 1 < |z| \\ B: |z-i| < 2 \\ C: 2 < |z-i| \end{cases} \quad (102)$$

(1-A)

$f(z)$  は、 $z=0, 2$  で正則ではない

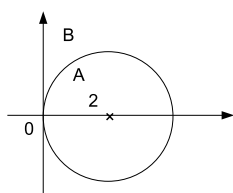


図 13 収束円:  $|z-2|=2$

特異点  $z=2$  の周りで Laurent 展開を行う.

$$|z-2| < 2 \rightarrow \frac{|z-2|}{2} < 1 \quad \left(\frac{|z-2|}{2} \text{ は領域内で収束}\right)$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)} \frac{1}{2+(z-2)} \\ &= \frac{1}{2(z-2)} \frac{1}{1+\frac{-(z-2)}{2}} \\ &= \frac{1}{2(z-2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{-(z-2)}{2}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}} \end{aligned} \quad (103)$$

$\Rightarrow$  展開式の中で一つ負の冪を含んでいるので、 $z=2$  は 1 位の極であることがわかる. 一般に負の冪をいくつ含むかで極の位数がわかる.

(1-B)

A と同様にして計算を行う.  $|z-2| > 2 \rightarrow \frac{2}{|z-2|} < 1 \quad \left(\frac{2}{|z-2|} \text{ は領域内で収束}\right)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} \frac{1}{2+(z-2)} = \frac{1}{(z-2)^2} \frac{1}{(z-2)^2} \frac{1}{1-\frac{-2}{z-2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-2)^{n-2}} \end{aligned} \quad (104)$$

A, B より収束円の内外で展開式の形が変わることがわかる. (1-A) の場合, 収束円は特異点である  $z=0$  を通っている. 一般に収束円は中心から最も近い特異点を通る.

(2-A)

関数は  $z = i, -i$  の特異点を持つ. A は  $z = 0$  を中心とした展開である.

$1 < |z| \rightarrow \left| \frac{-1}{z} \right| < 1 \rightarrow \left| \frac{-1}{z^2} \right| < \left| \frac{-1}{z} \right| < 1$  より

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{z^2}\right)} \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+2}} \end{aligned} \quad (105)$$

(2-B)

$z = i$  を中心とした展開

$|z - i| < 2 \rightarrow \left| \frac{-(z-i)}{2i} \right| < 1$  また  $z^2 + 1 = (z - i)^2 + 2i(z - i) = 2i(z - i) \left[ 1 - \frac{-(z-i)}{2i} \right]$  これより,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i(z - i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-(z - i)}{2i} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - i)}{(2i)^{n+1}} \end{aligned} \quad (106)$$

(2-C)

$2 < |z - i| \rightarrow \left| \frac{-2i}{z-i} \right| < 1$

B と同様にして

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i)^n}{(z - i)^{n+2}} \quad (107)$$

## 5 留数解析

### 5.1 留数定理

[定理 5.10] [留数定理]

$f(z)$  の  $n$  個の極  $a_k (k = 1, 2, \dots, n)$  を囲む閉曲線  $C$  について

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(a_k) \quad (108)$$

が成り立つ。右辺は  $C$  内部の  $n$  個の極における留数の和に  $2\pi i$  を乗じたものである。

$\text{Res}(a_k)$  : Laurent 展開の  $-1$  次の係数 (留数)

(証明)

$C$  内部に  $f(z)$  の極が  $n$  個あるとし、それぞれ  $a_k (k = 1, 2, \dots, n)$  とする。

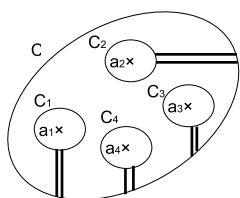


図 14 積分経路 (イメージ)

それぞれの極のみを囲む小さな円を  $C_k$  とする。 $C$  とそれぞれの  $C_k$  を橋でつないだ閉曲線を考える。積分は次のように分割できる。

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz \quad (109)$$

ここで、右辺第一項:  $\oint_{C_1} f(z) dz$  に着目する。第一項の  $f(z)$  を  $a_1$  を中心として Laurent 展開を行う。

$$f(z) = \frac{\alpha_{-m}}{(z-a_1)^m} + \frac{\alpha_{-m+1}}{(z-a_1)^{m-1}} + \dots + \frac{\alpha_{-1}}{(z-a_1)} + h(z) \quad (h(z) : D \text{ 内で正則な部分}, \alpha_{-m} : -m \text{ 次の係数}) \quad (110)$$

具体的に言うと  $h(z)$  は正の整数の冪乗で表される部分である。

この項は正則関数であるので Cauchy の積分定理より、

$$\oint_{C_1} h(z) dz = 0 \quad (111)$$

その他の負の冪項においては  $z = a_1$  を除いては正則なので  $C_1$  を  $z = a_1$  を横切らない範囲で変形できる。

例えば、 $z = a_1$  を中心として半径  $r$  の円周経路  $\Gamma$  に変形し積分を行う。

$$\Gamma : z = a_1 + re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(i) ( $k \neq 1$ )

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a_1)^k} dz = \frac{r^{k-1}}{(k-1)} \left[ e^{i\theta(k-1)} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (112)$$

(ii) ( $k = 1$ )

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a_1)} dz = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \quad (113)$$

よって、(110) 式で得られた多項式を項別積分すると、 $-1$  次の項以外全て 0 になることがわかる。また、(109) 式の全ての項に対して同様の計算を行うことで  $\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1} \text{Res}(a_k)$  を得る。

留数の求め方について説明を行う。(留数とは Laurent 展開の  $-1$  次の係数であることは留数定理のところでも述べましたが, 毎回 Laurent 展開を行うのはメンドウなので実際は次のような工夫をして計算を行います.)

[定理 5.11] [ $m$  位の極の留数の求め方]

$f(z)$  は  $z = z_0$  で正則でない関数とする.

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \right] \quad (114)$$

特に 1 位の極の場合

$$\alpha_{-1} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \quad \left[ f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} \right] \quad (115)$$

(証明)

まず,  $f(z)$  を  $z = z_0$  中心にして Laurent 展開を行う.

$$f(z) = \frac{\alpha_{-m}}{(z - a_1)^m} + \frac{\alpha_{-m+1}}{(z - a_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{-1}}{(z - a_1)} + h(z) \quad (h(z) : D \text{ 内で正則な部分}) \quad (116)$$

(115) 式の両辺に  $(z - z_0)^m$  を掛ける.

$$(z - z_0)^m f(z) = \alpha_{-m} + \alpha_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + \alpha_{-1}(z - z_0)^{m-1} + h(z)(z - z_0)^m \quad (117)$$

この (116) 式の両辺を  $m - 1$  回微分して,  $z \rightarrow z_0$  の極限を取る. このとき右辺は  $-1$  次以外の項が消える.

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = (m-1)! \alpha_{-1} + \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [h(z)(z - z_0)^m] \quad (118)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = (m-1)! \alpha_{-1} \quad (119)$$

よって,

$$\therefore \alpha_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \quad (120)$$

ここで, 特に 1 位の極の時には  $\alpha_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$  となるが.  $(z - z_0) f(z) = \frac{(z - z_0) h(z)}{g(z)}$  として Lospital の定理  $\left[ \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h'(x)}{g'(x)} \right]$  を用いると

$$\alpha_{-1} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \quad (121)$$

と簡単に計算できることがわかる.

(実際に次の例題で使ってみるので, ここで良くわからなかった人もとりあえず例題を眺めてみてください)



[例題 5.7] [留数定理の例題]

$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)}$  を次の範囲で周回積分せよ

$$(i) \quad C_1 : z = \frac{1}{2}e^{i\theta} \quad (122)$$

$$(ii) \quad C_2 : z = 1 + \frac{1}{2}e^{i\theta} \quad (123)$$

$$(iii) \quad C_3 : z = 2e^{i\theta} \quad (124)$$

$f(z)$  は  $z = i, -1, 1$  にそれぞれ 1 位の極を持つ。

(i) について、この領域では  $f(z)$  は正則なので、Cauchy の積分定理より

$$\oint_{C_1} f(z)dz = 0 \quad (125)$$

(ii) について、この領域では  $z = 1$  で 1 位の極を持つ。よって、留数定理より

$$\oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi \text{Res}(1) \quad (126)$$

ここで、先ほどの [定理 5.11] より留数は

$$\text{Res}(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{3z^2 - 2z + 1} = \frac{1}{2} \quad (127)$$

(今の場合、 $h(z) = 1$  ,  $g(z) = (z-1)(z^2+1)$  ,  $g'(z) = 3z^2 - 2z + 1$  として定理を使用しました。) よってこの値を代入すると

$$\oint_{C_2} f(z)dz = \pi i \quad (128)$$

(iii) の場合、 $f(z)$  の全ての極  $z = i, -i, 1$  を含んでいる。よって、留数定理より

$$\oint_{C_3} f(z)dz = 2\pi i [\text{Res}(1) + \text{Res}(i) + \text{Res}(-i)] \quad (129)$$

留数はそれぞれ、

$$\text{Res}(1) = \pi i \quad (130)$$

$$\text{Res}(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{3z^2 - 2z + 1} = \frac{-1}{2i + 2} \quad (131)$$

$$\text{Res}(-i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{3z^2 - 2z + 1} = \frac{1}{2i - 2} \quad (132)$$

となっているので、(129) 式に代入すると

$$\oint_{C_3} f(z)dz = 0 \quad (133)$$

## 5.2 実関数への応用

ここでは、留数定理を実関数に応用するための方法を考える。(本当に役立つものだと理解してもらうためにいきなりですが具体例から入ります.)

[例題 5.8] [被積分関数が三角関数の場合]

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta \quad (134)$$

を計算せよ.

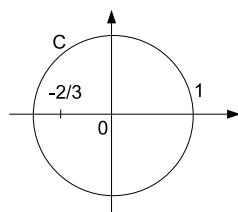


図 15 積分経路

このままでは留数定理が使えないので、 $z = e^{i\theta}$  と変数変換を行う。このとき、 $\cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$  となる。また、積分範囲が  $0 \sim 2\pi$  なので  $z$  は単位円上を反時計周りに一周するように動く。

$$\begin{aligned} (134) &= \oint_C \frac{1}{5 + \frac{3(z+z^{-1})}{2}} dz \\ &= \oint_C \frac{-2i}{3z^2 + 10z + 3} dz \end{aligned} \quad (135)$$

$3z^2 + 10z + 3 = 0 \rightarrow z = -\frac{1}{3}, -3$  よって、領域内で正則で無い点は  $-\frac{1}{3}$  なので (1 位の極) 留数定理より

$$\oint_C \frac{-2i}{(3z+1)(z+3)} dz = -2i2\pi i \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{3}\right) \quad (136)$$

留数は

$$\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{3}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{1}{6z+10} = \frac{1}{8} \quad (137)$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (138)$$

一般に  $f(\sin \theta, \cos \theta)$  の形をした関数では  $\cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2}, \sin \theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}$  として計算する。

[定理 5.12] [無限区間への応用]

$f(z)$  は実軸上に特異点を持っていないような関数とする. ここで,  $|z| \rightarrow \infty, f(z) \rightarrow 0$  ( $z = Re^{i\theta}$ ) が成り立っているとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}(a_k) \quad (139)$$

となる. 右辺は複素平面の上半面における留数の和である.

(証明)

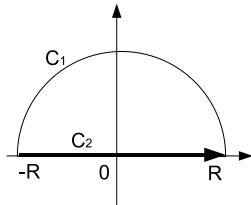


図 16 積分経路

図のように積分経路をとる. 内部にある極を  $a_k$  とすると, 留数定理より

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(a_k) \quad (140)$$

ここで, 左図の積分経路で  $R \rightarrow \infty$  とすると

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}(a_k) \quad (141)$$

となるので, 第一項が 0 に収束することを示す.  $z = Re^{i\theta}$  とパラメータ表示して, 優級数の方法を用いる.

$$\begin{aligned} |\text{第 1 項}| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}| d\theta \quad (\because |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi R |f(Re^{i\theta})| d\theta \quad (\because |ie^{i\theta}| = 1) \end{aligned} \quad (142)$$

ここで,  $|z| \rightarrow \infty$  で  $f(z) \rightarrow 0$  なので  $|f(z)|$  はある定数で抑えられる  $\implies |f(Re^{i\theta})| \leq \frac{M}{R^k}$  この関係を使うと上式はさらに抑えられて ( $R$  は半径,  $k, M$  は正の実定数)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi R |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{M}{R^{k-1}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi M}{R^{k-1}} = 0 \quad (143)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}(a_k) \quad (144)$$

[例題 5.9] [無限区間の積分]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad (145)$$

を計算せよ.

この被積分関数の極は  $z^4 + 1 = 0 \rightarrow z = \pm e^{\frac{\pi i}{4}}, \pm e^{\frac{3\pi i}{4}}$  でそれぞれ 1 位の極である. このうち上半面にあるものは  $z = e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}$  なので [定理 5.12] より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left[ \text{Res}(e^{\frac{\pi i}{4}}) + \text{Res}(e^{\frac{3\pi i}{4}}) \right] \quad (146)$$

となる. 留数は

$$\text{Res}(e^{\frac{\pi i}{4}}) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} \quad (147)$$

$$\text{Res}(e^{\frac{3\pi i}{4}}) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{3\pi i}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{\frac{\pi i}{4}}} \quad (148)$$

代入すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx &= \frac{\pi i}{2} \left[ i \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \end{aligned} \quad (149)$$

次に, Fourier 変換に対し非常に威力を発揮する定理を紹介する.

[定理 5.13] [Jordan の補助定理]

図 17 のように積分経路をとる. このとき  $|z| \rightarrow \infty$  で  $f(z) \rightarrow 0$  となる関数  $f(z)$  に対して (つまり,  $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$  が成り立っているとき)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad (a > 0) \quad (150)$$

が成り立つ.

(証明)

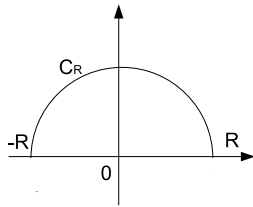


図 17 積分経路

$C_R$  は半径  $R$  の半円の弧の部分である. まず,  $C_R$  を  $z = Re^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) でパラメータ表示する.

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz &= \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) \exp[iaR(\cos\theta + i\sin\theta)] iRe^{i\theta} d\theta \end{aligned} \quad (151)$$

$0 \sim \pi$  の区間で  $e^{iaR\cos\theta}$  の積分が 0 になるので

$$\int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{-aR\sin\theta} iRe^{i\theta} d\theta \quad (152)$$

また,  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  の関係より上式は抑えられて

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq R \int_0^\pi d\theta |f(Re^{i\theta})| \quad (|ie^{i\theta}| = 1 \text{ も使いました.}) \quad (153)$$

ここで,  $|f(Re^{i\theta})| \leq \frac{M}{R^k}$  この関係を使うと (151) 式はさらに抑えられて

$$R \int_0^\pi d\theta |f(Re^{i\theta})| e^{-aR\sin\theta} \leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{-aR\sin\theta} \quad (154)$$

となる.(次ページに続きます.)

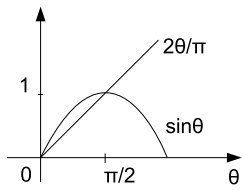


図 18  $\frac{2\theta}{\pi}$  と  $\sin \theta$  の関係

ここで、さらに優級数をつくるために図 18 のようなグラフを考える.

$0 \sim \frac{\pi}{2}$  で明らかに、 $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$  なので

$$\begin{aligned} \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{-aR \sin \theta} &\leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \frac{2\theta}{\pi}} \\ &= \frac{2M}{R^{k-1}} \left[ \frac{-\pi}{2aR} e^{-\frac{2aR\theta}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{M\pi}{2aR^k} (1 - e^{-aR}) \end{aligned} \quad (155)$$

$R \rightarrow \infty$  とすることで 0 とできるので

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad (a > 0) \quad (156)$$

が導かれる.

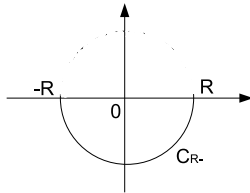


図 19 積分経路

また、 $a < 0$  のときは図 19 のような経路をとれば良い.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_{R-}} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad (a < 0) \quad (157)$$

また、この Jordan の補助定理を使うことによって、次の定理が導かれる.

[定理 5.14 ] [Fourier 変換に関する公式]

$f(z)$  は実軸上に特異点をもたず,  $|z| \rightarrow \infty$  で  $f(z) \rightarrow 0$  が成り立っているとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}(a_k) \quad (158)$$

右辺は  $a$  が  $a > 0$  の場合, 複素平面の上半面にある極における留数の和であり,  $a < 0$  の場合, 下半面の極における留数の和である.

(証明)

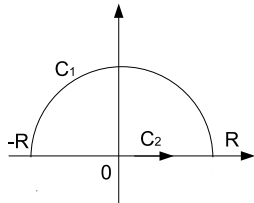


図 20 積分経路

$a > 0$  として図 20 のように経路をとると留数定理より

$$\int_{C_1} f(z)e^{iaz} dz + \int_{C_2} f(z)e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(a_k) \quad (159)$$

ここで, 上式の第一項は Jordan の補助定理より 0 となる. 結果,  $R \rightarrow \infty$  とすることによって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}(a_k) \quad (\text{上半面の留数の和}) \quad (160)$$

$a < 0$  の場合は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}(a_k) \quad (\text{下半面の留数の和}) \quad (161)$$

[例題 5.10] [Jordan の補助定理を利用する例]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (162)$$

を示せ.

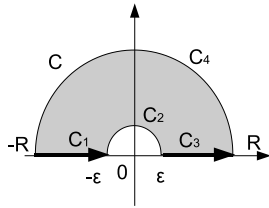


図 21 積分経路

まず, 図 21 のような経路で  $\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz$  を考える.

( $\frac{e^{iz}}{z}$  は実軸上  $z = 0$  に特異点を持っているので  $z = 0$  を避けるような経路をとっています.)  $C$  は半径  $R, \epsilon$  の半円と  $x$  軸上の線分を組み合わせた曲線であり, これを  $C_1, C_2, C_3, C_4$  と分割する.  $\frac{e^{iz}}{z}$  は  $C$  内部に特異点を持たないので, Cauchy の積分定理より

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} = \int_{C_1} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_3} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (163)$$

第 4 項は Jordan の補助定理より 0 である. また第 1, 3 項ははまとめて

$$\begin{aligned} (\text{第 1 項}) + (\text{第 3 項}) &= \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \\ &= \int_{\epsilon}^{-\epsilon} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned} \quad (164)$$

と表せる. 第 2 項は  $C_2$  を  $z = \epsilon e^{i\theta}$  とパラメータ表示する.

$$(\text{第 2 項}) = \int_{\pi}^0 \frac{\exp[i\epsilon e^{i\theta}]}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^{\pi} \exp[i\epsilon e^{i\theta}] d\theta \quad (165)$$

ここで,  $\epsilon$  は限りなく小さくとれるので  $\epsilon \rightarrow 0$  とすると, 第 2 項は  $-\pi i$  に収束する. よって, まとめると

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \left[ 2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx - i \int_0^{\pi} \exp[i\epsilon e^{i\theta}] d\theta \right] = 0 \quad (166)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (167)$$

## 参考文献

- [1] 後藤 憲一, 山本 邦夫, 神吉 健 「物理応用 数学演習」 共立出版株式会社
- [2] 千葉 逸人 「工学部で学ぶ数学」 プレアデス出版
- [3] 小野寺 嘉孝 「物理のための 応用数学」 裳華房